

# Złożoność obliczeniowa - Transformacja wielomianowa REACHABILITY do CIRCUIT VALUE

Marcin Żurowski

22 kwietnia 2026

# Plan zajęć

1 Transformacja

2 Zadanie

# Definicja sieci logicznej

- $C = (V, E)$  - jest grafem
- $V = \{1, \dots, n\}$  - bramki grafu  $C$
- Bramki mają:
  - Wzrostającą listę wejściową  $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$
  - Listę wyjściową
- $(i, j) \in E$  takie że  $i < j$  - brak cykli
- Wierzchołek  $n$  nie ma wyjść i jest bramką wyjściem

# Definicja sieci logicznej

- $C = (V, E)$  - jest grafem
- $V = \{1, \dots, n\}$  - bramki grafu  $C$
- Bramki mają:
  - rodzaj  $s(i) \in \{true, false, \vee, \wedge, \neg\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
  - stopnie wejściowe
- $(i, j) \in E$  takie że  $i < j$  - brak cykli
- Wierzchołek  $n$  nie ma wyjść i jest bramką wyjściem

# Definicja sieci logicznej

- $C = (V, E)$  - jest grafem
- $V = \{1, \dots, n\}$  - bramki grafu  $C$
- Bramki mają:
  - rodzaj  $s(i) \in \{true, false, \vee, \wedge, \neg\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
  - stopnie wejściowe:
    - $s(i) \in \{true, false\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
    - $s(i) \in \{\vee, \wedge\}$
    - $s(i) \in \{\neg\}$
- $(i, j) \in E$  takie że  $i < j$  - brak cykli
- Wierzchołek  $n$  nie ma wyjść i jest bramką wyjściem

# Definicja sieci logicznej

- $C = (V, E)$  - jest grafem
- $V = \{1, \dots, n\}$  - bramki grafu  $C$
- Bramki mają:
  - rodzaj  $s(i) \in \{true, false, \vee, \wedge, \neg\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
  - stopnie wejściowe:
    - 0 jeżeli  $s(i) \in \{true, false\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
    - 1 jeżeli  $s(i) \in \{\neg\}$
    - 2 jeżeli  $s(i) \in \{\vee, \wedge\}$
- $(i, j) \in E$  takie że  $i < j$  - brak cykli
- Wierzchołek  $n$  nie ma wyjść i jest bramką wyjściem

# Definicja sieci logicznej

- $C = (V, E)$  - jest grafem
- $V = \{1, \dots, n\}$  - bramki grafu  $C$
- Bramki mają:
  - rodzaj  $s(i) \in \{true, false, \vee, \wedge, \neg\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
  - stopnie wejściowe:
    - 0 jeżeli  $s(i) \in \{true, false\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
    - 1 jeżeli  $s(i) \in \{\neg\}$
    - 2 jeżeli  $s(i) \in \{\vee, \wedge\}$
- $(i, j) \in E$  takie że  $i < j$  - brak cykli
- Wierzchołek  $n$  nie ma wyjść i jest bramką wyjściem

# Definicja sieci logicznej

- $C = (V, E)$  - jest grafem
- $V = \{1, \dots, n\}$  - bramki grafu  $C$
- Bramki mają:
  - rodzaj  $s(i) \in \{true, false, \vee, \wedge, \neg\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
  - stopnie wejściowe:
    - 0 jeżeli  $s(i) \in \{true, false\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
    - 1 jeżeli  $s(i) \in \{\neg\}$
    - 2 jeżeli  $s(i) \in \{\vee, \wedge\}$
- $(i, j) \in E$  takie że  $i < j$  - brak cykli
- Wierzchołek  $n$  nie ma wyjść i jest bramką wyjściem

# Definicja sieci logicznej

- $C = (V, E)$  - jest grafem
- $V = \{1, \dots, n\}$  - bramki grafu  $C$
- Bramki mają:
  - rodzaj  $s(i) \in \{true, false, \vee, \wedge, \neg\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
  - stopnie wejściowe:
    - 0 jeżeli  $s(i) \in \{true, false\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
    - 1 jeżeli  $s(i) \in \{\neg\}$
    - 2 jeżeli  $s(i) \in \{\vee, \wedge\}$
- $(i, j) \in E$  takie że  $i < j$  - brak cykli
- Wierzchołek  $n$  nie ma wyjść i jest bramką wyjściem

# Definicja sieci logicznej

- $C = (V, E)$  - jest grafem
- $V = \{1, \dots, n\}$  - bramki grafu  $C$
- Bramki mają:
  - rodzaj  $s(i) \in \{true, false, \vee, \wedge, \neg\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
  - stopnie wejściowe:
    - 0 jeżeli  $s(i) \in \{true, false\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
    - 1 jeżeli  $s(i) \in \{\neg\}$
    - 2 jeżeli  $s(i) \in \{\vee, \wedge\}$
- $(i, j) \in E$  takie że  $i < j$  - brak cykli
- Wierzchołek  $n$  nie ma wyjść i jest bramką wyjściem

# Definicja sieci logicznej

- $C = (V, E)$  - jest grafem
- $V = \{1, \dots, n\}$  - bramki grafu  $C$
- Bramki mają:
  - rodzaj  $s(i) \in \{true, false, \vee, \wedge, \neg\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
  - stopnie wejściowe:
    - 0 jeżeli  $s(i) \in \{true, false\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
    - 1 jeżeli  $s(i) \in \{\neg\}$
    - 2 jeżeli  $s(i) \in \{\vee, \wedge\}$
- $(i, j) \in E$  takie że  $i < j$  - brak cykli
- Wierzchołek  $n$  nie ma wyjść i jest bramką wyjściem

# Definicja sieci logicznej

- $C = (V, E)$  - jest grafem
- $V = \{1, \dots, n\}$  - bramki grafu  $C$
- Bramki mają:
  - rodzaj  $s(i) \in \{true, false, \vee, \wedge, \neg\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
  - stopnie wejściowe:
    - 0 jeżeli  $s(i) \in \{true, false\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$
    - 1 jeżeli  $s(i) \in \{\neg\}$
    - 2 jeżeli  $s(i) \in \{\vee, \wedge\}$
- $(i, j) \in E$  takie że  $i < j$  - brak cykli
- Wierzchołek  $n$  nie ma wyjść i jest bramką **wyjściem**

# Problem CIRCUIT VALUE

Dla danej sieci  $C$ , bez *bramek zmiennych*.  
Należy stwierdzić czy istnieje wartościowanie  $T$  odpowiednie dla  $C$ ,  
takie, że  $T(C) = \text{true}$

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe `true` gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki.

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:
    - $h$  są bramkami typu  $\wedge$  taka, że  $h_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,k,k-1})$  i  $(g_{j,k,k-1})$ .
    - $g$  są bramkami typu  $\vee$  taka, że  $g_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,j,k-1})$  i  $(h_{i,j,k})$ .

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:
    - $h$  są bramkami typu  $\wedge$  taka, że  $h_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,k,k-1})$  i  $(g_{k,j,k-1})$ .
    - $g$  są bramkami typu  $\vee$  taka, że  $g_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,j,k-1})$  i  $(h_{i,j,k})$ .
    - Bramka  $g_{1,n,n}$  jest bramką wyjściową.

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:
    - $h$  są bramkami typu  $\wedge$  taka, że  $h_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,k,k-1})$  i  $(g_{k,j,k-1})$ .
    - $g$  są bramkami typu  $\vee$  taka, że  $g_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,j,k-1})$  i  $(h_{i,j,k})$ .
    - Bramka  $g_{1,n,n}$  jest bramką wyjściową.

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:
    - $h$  są bramkami typu  $\wedge$  taka, że  $h_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,k,k-1})$  i  $(g_{k,j,k-1})$ .
    - $g$  są bramkami typu  $\vee$  taka, że  $g_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,j,k-1})$  i  $(h_{i,j,k})$ .
    - Bramka  $g_{1,n,n}$  jest bramką wyjściową.

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków wewnątrz ścieżki większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:
    - $h$  są bramkami typu  $\wedge$  taka, że  $h_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,k,k-1})$  i  $(g_{k,j,k-1})$ .
    - $g$  są bramkami typu  $\vee$  taka, że  $g_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,j,k-1})$  i  $(h_{i,j,k})$ .
    - Bramka  $g_{1,n,n}$  jest bramką wyjściową.

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe  $true$  gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:
    - $h$  są bramkami typu  $\wedge$  taka, że  $h_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,k,k-1})$  i  $(g_{j,k,k-1})$ .
    - $g$  są bramkami typu  $\vee$  taka, że  $g_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,k,k-1})$  i  $(h_{j,k,k-1})$ .

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:
    - $h$  są bramkami typu  $\wedge$  taka, że  $h_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,k,k-1})$  i  $(g_{k,j,k-1})$ .
    - $g$  są bramkami typu  $\vee$  taka, że  $g_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,j,k-1})$  i  $(h_{i,j,k})$ .
    - Bramka  $g_{1,n,n}$  jest bramką wyjściową.

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:
    - $h$  są bramkami typu  $\wedge$  taka, że  $h_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,k,k-1})$  i  $(g_{k,j,k-1})$ .
    - $g$  są bramkami typu  $\vee$  taka, że  $g_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,j,k-1})$  i  $(h_{i,j,k})$ .
    - Bramka  $g_{1,n,n}$  jest bramką wyjściową.

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:
    - $h$  są bramkami typu  $\wedge$  taka, że  $h_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,k,k-1})$  i  $(g_{k,j,k-1})$ .
    - $g$  są bramkami typu  $\vee$  taka, że  $g_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,j,k-1})$  i  $(h_{i,j,k})$ .
    - Bramka  $g_{1,n,n}$  jest bramką wyjściową.

# Transformacja wielomianowa $R$

- Bramki sieci  $R(G)$  są postaci:
  - $g_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j \leq n$  i  $0 \leq k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ .
  - $h_{i,j,k}$ , gdzie  $1 \leq i, j, k \leq n$ , która jest prawdziwa gdy w  $G$  istnieje ścieżka od  $i$  do  $j$  nie mająca wierzchołków większych od  $k$ , ale przechodząca przez  $k$ .
- typy bramek i wejścia:
  - Dla  $k = 0$  bramki  $g_{i,j,0}$  są bramkami wejściowymi. Równe *true* gdy  $i = j$  lub  $(i, j)$  jest krawędzią w grafie  $G$ .
  - Dla  $k = 1, \dots, n$  bramki:
    - $h$  są bramkami typu  $\wedge$  taka, że  $h_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,k,k-1})$  i  $(g_{k,j,k-1})$ .
    - $g$  są bramkami typu  $\vee$  taka, że  $g_{i,j,k}$  a jej poprzednikami są bramki  $(g_{i,j,k-1})$  i  $(h_{i,j,k})$ .
    - Bramka  $g_{1,n,n}$  jest bramką wyjściową.

# Dowód

- $R(G)$  jest poprawną siecią bez zmiennych, której bramki możemy ponumerować po trzecim indeksie:  $1, 2, \dots, 2n^3 + n^2$ .
- Pokazać przez indukcję względem  $k$ , że jeśli istnieje ścieżka w grafie  $G$  od 1 do  $n$ , to  $g_{1,n,n} = true$ .

# Dowód

- $R(G)$  jest poprawną siecią bez zmiennych, której bramki możemy ponumerować po trzecim indeksie:  $1, 2, \dots, 2n^3 + n^2$ .
- Pokazać przez indukcję względem  $k$ , że jeśli istnieje ścieżka w grafie  $G$  od 1 do  $n$ , to  $g_{1,n,n} = true$ .

# Praca domowa 5 pkt.

- Napisz program, który rozwiązuje problem CIRCUIT VALUE.
- Napisz algorytm przekształcający instancje problemu REACHABILITY na instancję problemu CIRCUIT VALUE.

# Praca domowa 5 pkt.

- Napisz program, który rozwiązuje problem CIRCUIT VALUE.
- Napisz algorytm przekształcający instancje problemu REACHABILITY na instancję problemu CIRCUIT VALUE.