Złożoność obliczeniowa - Transformacja wielomianowa SAT, HAMILTON PATH

Marcin Żurowski

15 kwietnia 2026

Plan zajęć

Transformacja wielomianowa R

- Weźmy dowolny graf G i $|V| = n$.
- Formuła $R(G)$ tworzy n^2 zmiennych logicznych: x_{ij} dla $1 \leq i, j \leq n$, które mają wartości "prawda" wtedy i tylko wtedy gdy w grafie G wierzchołek j jest i-tym wierzchołkiem na ścieżce Hamiltona.
- Formuła $R(G)$ jest w koniunktywnej postaci normalnej i jest zbudowana następująco:

Transformacja wielomianowa R

- Weźmy dowolny graf G i $|V| = n$.
- Formuła $R(G)$ tworzy n^2 zmiennych logicznych: x_{ij} dla $1 \leq i, j \leq n$, które mają wartości "prawda" wtedy i tylko wtedy gdy w grafie G wierzchołek j jest i-tym wierzchołkiem na ścieżce Hamiltona.
- Formuła $R(G)$ jest w koniunktywnej postaci normalnej i jest zbudowana następująco:
  1. Dla każdego j konstruujemy $(x_{1j} \vee x_{2j} \vee \cdots \vee x_{nj})$ ponieważ j musi pojawić się na ścieżce.
  2. Dla każdej pary $i \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{kj})$, ponieważ nie mogą istnieć wierzchołek j dwukrotnie na ścieżce Hamiltona.

Transformacja wielomianowa R

- Weźmy dowolny graf G i $|V| = n$.
- Formuła $R(G)$ tworzy n^2 zmiennych logicznych: x_{ij} dla $1 \leq i, j \leq n$, które mają wartości "prawda" wtedy i tylko wtedy gdy w grafie G wierzchołek j jest i-tym wierzchołkiem na ścieżce Hamiltona.
- Formuła $R(G)$ jest w koniunktywnej postaci normalnej i jest zbudowana następująco:
  1. Dla każdego j konstruujemy $(x_{1j} \vee x_{2j} \vee \cdots \vee x_{nj})$ ponieważ j musi pojawić się na ścieżce.
  2. Dla każdej pary $i \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{kj})$, ponieważ nie mogą istnieć wierzchołek j dwukrotnie na ścieżce Hamiltona.
  3. Dla każdego i konstruujemy $(x_{i1} \vee x_{i2} \vee \cdots \vee x_{in})$ ponieważ musi jakiś wierzchołek i pojawić się na ścieżce.
  4. Dla każdej pary $j \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{ik})$, ponieważ żadne dwa wierzchołki nie mogą jednocześnie być na tej samej pozycji.
  5. Dla każdej pary (i, j) nie będącej krawędzią w G konstruujemy $(\neg x_{ki} \vee \neg x_{k+1,j})$ dla $k = 1, \ldots, n-1$.

Transformacja wielomianowa R

- Weźmy dowolny graf G i $|V| = n$.
- Formuła $R(G)$ tworzy n^2 zmiennych logicznych: x_{ij} dla $1 \leq i, j \leq n$, które mają wartości "prawda" wtedy i tylko wtedy gdy w grafie G wierzchołek j jest i-tym wierzchołkiem na ścieżce Hamiltona.
- Formuła $R(G)$ jest w koniunktywnej postaci normalnej i jest zbudowana następująco:
  1. Dla każdego j konstruujemy $(x_{1j} \vee x_{2j} \vee \cdots \vee x_{nj})$ ponieważ j musi pojawić się na ścieżce.
  2. Dla każdej pary $i \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{kj})$, ponieważ nie mogą istnieć wierzchołek j dwukrotnie na ścieżce Hamiltona.
  3. Dla każdego i konstruujemy $(x_{i1} \vee x_{i2} \vee \cdots \vee x_{in})$ ponieważ musi jakiś wierzchołek i pojawić się na ścieżce.
  4. Dla każdej pary $j \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{ik})$, ponieważ żadne dwa wierzchołki nie mogą jednocześnie być na tej samej pozycji.
  5. Dla każdej pary (i, j) nie będącej krawędzią w G konstruujemy $(\neg x_{ki} \vee \neg x_{k+1,j})$ dla $k = 1, \ldots, n-1$.

Transformacja wielomianowa R

- Weźmy dowolny graf G i $|V| = n$.
- Formuła $R(G)$ tworzy n^2 zmiennych logicznych: x_{ij} dla $1 \leq i, j \leq n$, które mają wartości "prawda" wtedy i tylko wtedy gdy w grafie G wierzchołek j jest i-tym wierzchołkiem na ścieżce Hamiltona.
- Formuła $R(G)$ jest w koniunktywnej postaci normalnej i jest zbudowana następująco:
  1. Dla każdego j konstruujemy $(x_{1j} \vee x_{2j} \vee \cdots \vee x_{nj})$ ponieważ j musi pojawić się na ścieżce.
  2. Dla każdej pary $i \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{kj})$, ponieważ nie mogą istnieć wierzchołek j dwukrotnie na ścieżce Hamiltona.
  3. Dla każdego i konstruujemy $(x_{i1} \vee x_{i2} \vee \cdots \vee x_{in})$ ponieważ musi jakiś wierzchołek i pojawić się na ścieżce.
  4. Dla każdej pary $j \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{ik})$, ponieważ żadne dwa wierzchołki nie mogą jednocześnie być na tej samej pozycji.
  5. Dla każdej pary (i, j) nie będącej krawędzią w G konstruujemy $(\neg x_{ki} \vee \neg x_{k+1,j})$ dla $k = 1, \ldots, n-1$.

Transformacja wielomianowa R

- Weźmy dowolny graf G i $|V| = n$.
- Formuła $R(G)$ tworzy n^2 zmiennych logicznych: x_{ij} dla $1 \leq i, j \leq n$, które mają wartości "prawda" wtedy i tylko wtedy gdy w grafie G wierzchołek j jest i-tym wierzchołkiem na ścieżce Hamiltona.
- Formuła $R(G)$ jest w koniunktywnej postaci normalnej i jest zbudowana następująco:
  1. Dla każdego j konstruujemy $(x_{1j} \vee x_{2j} \vee \cdots \vee x_{nj})$ ponieważ j musi pojawić się na ścieżce.
  2. Dla każdej pary $i \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{kj})$, ponieważ nie mogą istnieć wierzchołek j dwukrotnie na ścieżce Hamiltona.
  3. Dla każdego i konstruujemy $(x_{i1} \vee x_{i2} \vee \cdots \vee x_{in})$ ponieważ musi jakiś wierzchołek i pojawić się na ścieżce.
  4. Dla każdej pary $j \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{ik})$, ponieważ żadne dwa wierzchołki nie mogą jednocześnie być na tej samej pozycji.
  5. Dla każdej pary (i, j) nie będącej krawędzią w G konstruujemy $(\neg x_{ki} \vee \neg x_{k+1,j})$ dla $k = 1, \ldots, n-1$.

Transformacja wielomianowa R

- Weźmy dowolny graf G i $|V| = n$.
- Formuła $R(G)$ tworzy n^2 zmiennych logicznych: x_{ij} dla $1 \leq i, j \leq n$, które mają wartości "prawda" wtedy i tylko wtedy gdy w grafie G wierzchołek j jest i-tym wierzchołkiem na ścieżce Hamiltona.
- Formuła $R(G)$ jest w koniunktywnej postaci normalnej i jest zbudowana następująco:
  1. Dla każdego j konstruujemy $(x_{1j} \vee x_{2j} \vee \cdots \vee x_{nj})$ ponieważ j musi pojawić się na ścieżce.
  2. Dla każdej pary $i \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{kj})$, ponieważ nie mogą istnieć wierzchołek j dwukrotnie na ścieżce Hamiltona.
  3. Dla każdego i konstruujemy $(x_{i1} \vee x_{i2} \vee \cdots \vee x_{in})$ ponieważ musi jakiś wierzchołek i pojawić się na ścieżce.
  4. Dla każdej pary $j \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{ik})$, ponieważ żadne dwa wierzchołki nie mogą jednocześnie być na tej samej pozycji.
  5. Dla każdej pary (i, j) nie będącej krawędzią w G konstruujemy $(\neg x_{ki} \vee \neg x_{k+1,j})$ dla $k = 1, \ldots, n-1$.

Transformacja wielomianowa R

- Weźmy dowolny graf G i $|V| = n$.
- Formuła $R(G)$ tworzy n^2 zmiennych logicznych: x_{ij} dla $1 \leq i, j \leq n$, które mają wartości "prawda" wtedy i tylko wtedy gdy w grafie G wierzchołek j jest i-tym wierzchołkiem na ścieżce Hamiltona.
- Formuła $R(G)$ jest w koniunktywnej postaci normalnej i jest zbudowana następująco:
  1. Dla każdego j konstruujemy $(x_{1j} \vee x_{2j} \vee \cdots \vee x_{nj})$ ponieważ j musi pojawić się na ścieżce.
  2. Dla każdej pary $i \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{kj})$, ponieważ nie mogą istnieć wierzchołek j dwukrotnie na ścieżce Hamiltona.
  3. Dla każdego i konstruujemy $(x_{i1} \vee x_{i2} \vee \cdots \vee x_{in})$ ponieważ musi jakiś wierzchołek i pojawić się na ścieżce.
  4. Dla każdej pary $j \neq k$ konstruujemy $(\neg x_{ij} \vee \neg x_{ik})$, ponieważ żadne dwa wierzchołki nie mogą jednocześnie być na tej samej pozycji.
  5. Dla każdej pary (i, j) nie będącej krawędzią w G konstruujemy $(\neg x_{ki} \vee \neg x_{k+1,j})$ dla $k = 1, \ldots, n-1$.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Dla każdego G formuła $R(G)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy G posiada ścieżkę Hamiltona
- Jeżeli graf G posiada ścieżkę Hamiltona, to spełnialna jest formuła $R(G)$
- Wykazać, ze formulą $R(G)$ jest generowana w czasie wielomianowym.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Dla każdego G formuła $R(G)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy G posiada ścieżkę Hamiltona
- Jeżeli graf G posiada ścieżkę Hamiltona, to spełnialna jest formuła $R(G)$
- Wykazać, ze formulą $R(G)$ jest generowana w czasie wielomianowym.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Dla każdego G formuła $R(G)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy G posiada ścieżkę Hamiltona
- Jeżeli graf G posiada ścieżkę Hamiltona, to spełnialna jest formuła $R(G)$
- Wykazać, ze formulą $R(G)$ jest generowana w czasie wielomianowym.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Dla każdego G formuła $R(G)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy G posiada ścieżkę Hamiltona
  - Jeżeli $R(G)$ jest spełnialna, to istnieje wartościowanie T które spełnia wszystkie klauzule.
  - Jeżeli spełnione są formuły (1) i (2) to dla każdego j istnieje dokładnie jedno i.
  - Jeżeli spełnione są formuły (3) i (4) to dla każdego i istnieje dokładnie jedno j.
  - Stąd T reprezentuje permutację $\pi(1), \ldots, \pi(n)$ wierzchołków grafu G, gdzie $\pi(i) = j$ gdy $T(x_{ij}) = true$
  - Jeżeli jest spełniona formuła (5) oznacza to, że jeśli (i, j) nie jest krawędzią w grafie G to te wierzchołki nie będą obok siebie w ścieżce Hamiltona, co wymusza, że para wierzchołków $(\pi(k), \pi(k+1))$ musi być połączona krawędzią w grafie G, a to oznacza, że permutacja $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ jest ścieżką Hamiltona w grafie G.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Dla każdego G formuła $R(G)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy G posiada ścieżkę Hamiltona
  - Jeżeli $R(G)$ jest spełnialna, to istnieje wartościowanie T które spełnia wszystkie klauzule.
  - Jeżeli spełnione są formuły (1) i (2) to dla każdego j istnieje dokładnie jedno i.
  - Jeżeli spełnione są formuły (3) i (4) to dla każdego i istnieje dokładnie jedno j.
  - Stąd T reprezentuje permutację $\pi(1), \ldots, \pi(n)$ wierzchołków grafu G, gdzie $\pi(i) = j$ gdy $T(x_{ij}) = true$
  - Jeżeli jest spełniona formuła (5) oznacza to, że jeśli (i, j) nie jest krawędzią w grafie G to te wierzchołki nie będą obok siebie w ścieżce Hamiltona, co wymusza, że para wierzchołków $(\pi(k), \pi(k+1))$ musi być połączona krawędzią w grafie G, a to oznacza, że permutacja $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ jest ścieżką Hamiltona w grafie G.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Dla każdego G formuła $R(G)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy G posiada ścieżkę Hamiltona
  - Jeżeli $R(G)$ jest spełnialna, to istnieje wartościowanie T które spełnia wszystkie klauzule.
  - Jeżeli spełnione są formuły (1) i (2) to dla każdego j istnieje dokładnie jedno i.
  - Jeżeli spełnione są formuły (3) i (4) to dla każdego i istnieje dokładnie jedno j.
  - Stąd T reprezentuje permutację $\pi(1), \ldots, \pi(n)$ wierzchołków grafu G, gdzie $\pi(i) = j$ gdy $T(x_{ij}) = true$
  - Jeżeli jest spełniona formuła (5) oznacza to, że jeśli (i, j) nie jest krawędzią w grafie G to te wierzchołki nie będą obok siebie w ścieżce Hamiltona, co wymusza, że para wierzchołków $(\pi(k), \pi(k+1))$ musi być połączona krawędzią w grafie G, a to oznacza, że permutacja $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ jest ścieżką Hamiltona w grafie G.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Dla każdego G formuła $R(G)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy G posiada ścieżkę Hamiltona
  - Jeżeli $R(G)$ jest spełnialna, to istnieje wartościowanie T które spełnia wszystkie klauzule.
  - Jeżeli spełnione są formuły (1) i (2) to dla każdego j istnieje dokładnie jedno i.
  - Jeżeli spełnione są formuły (3) i (4) to dla każdego i istnieje dokładnie jedno j.
  - Stąd T reprezentuje permutację $\pi(1), \dots, \pi(n)$ wierzchołków grafu G, gdzie $\pi(i) = j$ gdy $T(x_{ij}) = true$
  - Jeżeli jest spełniona formuła (5) oznacza to, że jeśli (i, j) nie jest krawędzią w grafie G to te wierzchołki nie będą obok siebie w ścieżce Hamiltona, co wymusza, że para wierzchołków $(\pi(k), \pi(k+1))$ musi być połączona krawędzią w grafie G, a to oznacza, że permutacja $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ jest ścieżką Hamiltona w grafie G.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Dla każdego G formuła $R(G)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy G posiada ścieżkę Hamiltona
  - Jeżeli $R(G)$ jest spełnialna, to istnieje wartościowanie T które spełnia wszystkie klauzule.
  - Jeżeli spełnione są formuły (1) i (2) to dla każdego j istnieje dokładnie jedno i.
  - Jeżeli spełnione są formuły (3) i (4) to dla każdego i istnieje dokładnie jedno j.
  - Stąd T reprezentuje permutację $\pi(1), \ldots, \pi(n)$ wierzchołków grafu G, gdzie $\pi(i) = j$ gdy $T(x_{ij}) = true$
  - Jeżeli jest spełniona formuła (5) oznacza to, że jeśli (i, j) nie jest krawędzią w grafie G to te wierzchołki nie będą obok siebie w ścieżce Hamiltona, co wymusza, że para wierzchołków $(\pi(k), \pi(k+1))$ musi być połączona krawędzią w grafie G, a to oznacza, że permutacja $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ jest ścieżką Hamiltona w grafie G.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Dla każdego G formuła $R(G)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy G posiada ścieżkę Hamiltona
  - Jeżeli $R(G)$ jest spełnialna, to istnieje wartościowanie T które spełnia wszystkie klauzule.
  - Jeżeli spełnione są formuły (1) i (2) to dla każdego j istnieje dokładnie jedno i.
  - Jeżeli spełnione są formuły (3) i (4) to dla każdego i istnieje dokładnie jedno j.
  - Stąd T reprezentuje permutację $\pi(1), \ldots, \pi(n)$ wierzchołków grafu G, gdzie $\pi(i) = j$ gdy $T(x_{ij}) = true$
  - Jeżeli jest spełniona formuła (5) oznacza to, że jeśli (i, j) nie jest krawędzią w grafie G to te wierzchołki nie będą obok siebie w ścieżce Hamiltona, co wymusza, że para wierzchołków $(\pi(k), \pi(k+1))$ musi być połączona krawędzią w grafie G, a to oznacza, że permutacja $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ jest ścieżką Hamiltona w grafie G.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Jeżeli graf G posiada ścieżkę Hamiltona, to spełnialna jest formuła $R(G)$
  - Jeżeli graf G posiada ścieżkę Hamiltona $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$, to wartościowanie T takie, że $T(x_{ij}) = \mathit{true}$ gdy $\pi(i) = j$, oraz $T(x_{ij}) = \mathit{false}$ gdy $\pi(i) \neq j$ spełnia wszystkie formuły $R(G)$.
- Wykazać, ze formulą $R(G)$ jest generowana w czasie wielomianowym.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Jeżeli graf G posiada ścieżkę Hamiltona, to spełnialna jest formuła $R(G)$
  - Jeżeli graf G posiada ścieżkę Hamiltona $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$, to wartościowanie T takie, że $T(x_{ij}) = true$ gdy $\pi(i) = j$, oraz $T(x_{ij}) = false$ gdy $\pi(i) \neq j$ spełnia wszystkie formuły $R(G)$.
- Wykazać, ze formulą $R(G)$ jest generowana w czasie wielomianowym.

Dowód twierdzenia, że R jest redukcją problemu HAMILTON PATH do SAT

- Jeżeli graf G posiada ścieżkę Hamiltona, to spełnialna jest formuła $R(G)$
  - Jeżeli graf G posiada ścieżkę Hamiltona $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$, to wartościowanie T takie, że $T(x_{ij}) = true$ gdy $\pi(i) = j$, oraz $T(x_{ij}) = false$ gdy $\pi(i) \neq j$ spełnia wszystkie formuły $R(G)$.
- Wykazać, ze formulą $R(G)$ jest generowana w czasie wielomianowym.

Praca domowa 5 pkt.

- Napisz algorytm przekształcający instancje problemu SAT na instancję problemu HAMILTON PATH.