

Algorytmy i struktury danych - Problem Sortowania

Marcin Żurowski

21 kwietnia 2026

- 1 Problem sortowania
- 2 Sortowanie przez wstawianie
- 3 Sortowanie bąbelkowe
- 4 Sortowanie przez scalanie
- 5 Sortowanie szybkie
- 6 Sortowanie przez zliczanie
- 7 Poprawność algorytmów

Problem sortowania

- Sortowanie polega na ustawianiu w zadanej kolejności elementów pewnego ciągu.
- Domyślnie przyjmujemy, że należy ustawić liczby zawarte w tablicy $A[1..n]$ w porządku niemalejącym.
- Sortowanie w miejscu oznacza, że wszystkie oprócz stałej liczby elementów znajdują się cały czas w tej samej tablicy.
- Algorytm sortowania jest przyrostowy, jeśli po każdym głównym kroku tego algorytmu rośnie rozmiar posortowanej części tablicy.

Problem sortowania

- Sortowanie polega na ustawianiu w zadanej kolejności elementów pewnego ciągu.
- Domyślnie przyjmujemy, że należy ustawić liczby zawarte w tablicy $A[1..n]$ w porządku niemalejącym.
- Sortowanie w miejscu oznacza, że wszystkie oprócz stałej liczby elementów znajdują się cały czas w tej samej tablicy.
- Algorytm sortowania jest przyrostowy, jeśli po każdym głównym kroku tego algorytmu rośnie rozmiar posortowanej części tablicy.

Problem sortowania

- Sortowanie polega na ustawianiu w zadanej kolejności elementów pewnego ciągu.
- Domyślnie przyjmujemy, że należy ustawić liczby zawarte w tablicy $A[1..n]$ w porządku niemalejącym.
- Sortowanie w miejscu oznacza, że wszystkie oprócz stałej liczby elementów znajdują się cały czas w tej samej tablicy.
- Algorytm sortowania jest przyrostowy, jeśli po każdym głównym kroku tego algorytmu rośnie rozmiar posortowanej części tablicy.

Problem sortowania

- Sortowanie polega na ustawianiu w zadanej kolejności elementów pewnego ciągu.
- Domyślnie przyjmujemy, że należy ustawić liczby zawarte w tablicy $A[1..n]$ w porządku niemalejącym.
- Sortowanie w miejscu oznacza, że wszystkie oprócz stałej liczby elementów znajdują się cały czas w tej samej tablicy.
- Algorytm sortowania jest przyrostowy, jeśli po każdym głównym kroku tego algorytmu rośnie rozmiar posortowanej części tablicy.

Sortowanie przez wstawianie (insertion sort)

- Mając posortowaną tablicę $A[1..j-1]$, wstawiamy element $A[j]$ na właściwe miejsce w tej tablicy, otrzymując posortowaną tablicę $A[1..j]$
- powtarzamy powyższy proces dla $j = 2, \dots, n$.
- Sortowanie w miejscu.
- Metoda przyrostowa.

Sortowanie przez wstawianie (insertion sort)

- Mając posortowaną tablicę $A[1..j-1]$, wstawiamy element $A[j]$ na właściwe miejsce w tej tablicy, otrzymując posortowaną tablicę $A[1..j]$
- powtarzamy powyższy proces dla $j = 2, \dots, n$.
- Sortowanie w miejscu.
- Metoda przyrostowa.

Sortowanie przez wstawianie (insertion sort)

- Mając posortowaną tablicę $A[1..j-1]$, wstawiamy element $A[j]$ na właściwe miejsce w tej tablicy, otrzymując posortowaną tablicę $A[1..j]$
- powtarzamy powyższy proces dla $j = 2, \dots, n$.
- Sortowanie w miejscu.
- Metoda przyrostowa.

Sortowanie przez wstawianie (insertion sort)

- Mając posortowaną tablicę $A[1..j-1]$, wstawiamy element $A[j]$ na właściwe miejsce w tej tablicy, otrzymując posortowaną tablicę $A[1..j]$
- powtarzamy powyższy proces dla $j = 2, \dots, n$.
- Sortowanie w miejscu.
- Metoda przyrostowa.

Sortowanie przez wstawianie

```
procedure SORT-W(A, n)
  int array A[1..n]
  int n, r
  for j = 2 to n
    r = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > r
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = r
```

Sortowanie przez wstawianie

- W każdej iteracji pętli **for** wykonana jest pętla **while** oraz pewna stała liczba operacji.
- Liczba iteracji pętli **while** zależy od kolejności danych wejściowych.
- W każdej iteracji pętli **while** wykonana jest stałą liczbą operacji.
- Niech t_j oznacza liczbę sprawdzeń warunku pętli **while** dla $j = 2, \dots, n$.
- Złożoność algorytmu $\sum_{j=2}^n (\Theta(1) + t_j \Theta(1)) = \Theta(\sum_{j=2}^n t_j)$.

Sortowanie przez wstawianie

- W każdej iteracji pętli **for** wykonana jest pętla **while** oraz pewna stała liczba operacji.
- Liczba iteracji pętli **while** zależy od kolejności danych wejściowych.
- W każdej iteracji pętli **while** wykonana jest stałą liczbą operacji.
- Niech t_j oznacza liczbę sprawdzeń warunku pętli **while** dla $j = 2, \dots, n$.
- Złożoność algorytmu $\sum_{j=2}^n (\Theta(1) + t_j \Theta(1)) = \Theta(\sum_{j=2}^n t_j)$.

Sortowanie przez wstawianie

- W każdej iteracji pętli **for** wykonana jest pętla **while** oraz pewna stała liczba operacji.
- Liczba iteracji pętli **while** zależy od kolejności danych wejściowych.
- W każdej iteracji pętli **while** wykonana jest stałą liczbą operacji.
- Niech t_j oznacza liczbę sprawdzeń warunku pętli **while** dla $j = 2, \dots, n$.
- Złożoność algorytmu $\sum_{j=2}^n (\Theta(1) + t_j \Theta(1)) = \Theta(\sum_{j=2}^n t_j)$.

Sortowanie przez wstawianie

- W każdej iteracji pętli **for** wykonana jest pętla **while** oraz pewna stała liczba operacji.
- Liczba iteracji pętli **while** zależy od kolejności danych wejściowych.
- W każdej iteracji pętli **while** wykonana jest stałą liczbą operacji.
- Niech t_j oznacza liczbę sprawdzeń warunku pętli **while** dla $j = 2, \dots, n$.
- Złożoność algorytmu $\sum_{j=2}^n (\Theta(1) + t_j \Theta(1)) = \Theta(\sum_{j=2}^n t_j)$.

Sortowanie przez wstawianie

- W każdej iteracji pętli **for** wykonana jest pętla **while** oraz pewna stała liczba operacji.
- Liczba iteracji pętli **while** zależy od kolejności danych wejściowych.
- W każdej iteracji pętli **while** wykonana jest stałą liczbą operacji.
- Niech t_j oznacza liczbę sprawdzeń warunku pętli **while** dla $j = 2, \dots, n$.
- Złożoność algorytmu $\sum_{j=2}^n (\Theta(1) + t_j \Theta(1)) = \Theta(\sum_{j=2}^n t_j)$.

Sortowanie przez wstawianie

- Złożoność optymistyczna:
Dane wejściowe są posortowane niemalejąco
 $B(n) = \Theta(n)$.
- Złożoność pesymistyczna:
Dane wejściowe są posortowane malejąco
 $W(n) = \Theta(n^2)$.

Sortowanie przez wstawianie

- Złożoność optymistyczna:
Dane wejściowe są posortowane niemalejąco
 $B(n) = \Theta(n)$.
- Złożoność pesymistyczna:
Dane wejściowe są posortowane malejąco
 $W(n) = \Theta(n^2)$.

Sortowanie bąbelkowe (bubble sort)

- Przeglądamy tablice $A[1..n]$, zamieniając miejscami dwie sąsiednie liczby, jeśli są ustanowione w niewłaściwej kolejności.
- Po przejściu całej tablicy jej największy element znajdzie się na ostatniej pozycji.
- Powtarzamy powyższy proces dla coraz krótszych podtablic:
 $A[1..n-1]$, $A[1..n-2]$, ..., $A[1..2]$
- Sortowanie w miejscu.
- Metoda przyrostowa.

Sortowanie bąbelkowe (bubble sort)

- Przeglądamy tablice $A[1..n]$, zamieniając miejscami dwie sąsiednie liczby, jeśli są ustanowione w niewłaściwej kolejności.
- Po przejściu całej tablicy jej największy element znajdzie się na ostatniej pozycji.
- Powtarzamy powyższy proces dla coraz krótszych podtablic:
 $A[1..n-1]$, $A[1..n-2]$, ..., $A[1..2]$
- Sortowanie w miejscu.
- Metoda przyrostowa.

Sortowanie bąbelkowe (bubble sort)

- Przeglądamy tablice $A[1..n]$, zamieniając miejscami dwie sąsiednie liczby, jeśli są ustanowione w niewłaściwej kolejności.
- Po przejściu całej tablicy jej największy element znajdzie się na ostatniej pozycji.
- Powtarzamy powyższy proces dla coraz krótszych podtablic:
 $A[1..n-1]$, $A[1..n-2]$, \dots , $A[1..2]$
- Sortowanie w miejscu.
- Metoda przyrostowa.

Sortowanie bąbelkowe (bubble sort)

- Przeglądamy tablice $A[1..n]$, zamieniając miejscami dwie sąsiednie liczby, jeśli są ustanowione w niewłaściwej kolejności.
- Po przejściu całej tablicy jej największy element znajdzie się na ostatniej pozycji.
- Powtarzamy powyższy proces dla coraz krótszych podtablic:
 $A[1..n-1]$, $A[1..n-2]$, \dots , $A[1..2]$
- Sortowanie w miejscu.
- Metoda przyrostowa.

Sortowanie bąbelkowe (bubble sort)

- Przeglądamy tablice $A[1..n]$, zamieniając miejscami dwie sąsiednie liczby, jeśli są ustanowione w niewłaściwej kolejności.
- Po przejściu całej tablicy jej największy element znajdzie się na ostatniej pozycji.
- Powtarzamy powyższy proces dla coraz krótszych podtablic:
 $A[1..n-1]$, $A[1..n-2]$, \dots , $A[1..2]$
- Sortowanie w miejscu.
- Metoda przyrostowa.

Sortowanie bąbelkowe

```
procedure SORT-B(A, n)
  int array A[1..n]
  int n, r
  for i = n - 1 downto 1
    for j = 1 to i
      if A[j] > A[j + 1]
        A[j] <-> A[j + 1]
```

Sortowanie bąbelkowe

- W każdej iteracji zewnętrznej pętli **for** wykonywana jest wewnętrzna pętla **for**.
- Liczba iteracji wewnętrznej pętli **for** wynosi i dla $i = n - 1, \dots, 1$.
- W każdej iteracji wewnętrznej pętli **for** wykonana jest stała liczba operacji.
- Złożoność algorytmu: $\Theta(\sum_{i=1}^{n-1} i) = \Theta(n^2)$ w przypadku optymistycznym i pesymistycznym.

Sortowanie bąbelkowe

- W każdej iteracji zewnętrznej pętli **for** wykonywana jest wewnętrzna pętla **for**.
- Liczba iteracji wewnętrznej pętli **for** wynosi i dla $i = n - 1, \dots, 1$.
- W każdej iteracji wewnętrznej pętli **for** wykonana jest stała liczba operacji.
- Złożoność algorytmu: $\Theta(\sum_{i=1}^{n-1} i) = \Theta(n^2)$ w przypadku optymistycznym i pesymistycznym.

Sortowanie bąbelkowe

- W każdej iteracji zewnętrznej pętli **for** wykonywana jest wewnętrzna pętla **for**.
- Liczba iteracji wewnętrznej pętli **for** wynosi i dla $i = n - 1, \dots, 1$.
- W każdej iteracji wewnętrznej pętli **for** wykonana jest stała liczba operacji.
- Złożoność algorytmu: $\Theta(\sum_{i=1}^{n-1} i) = \Theta(n^2)$ w przypadku optymistycznym i pesymistycznym.

Sortowanie bąbelkowe

- W każdej iteracji zewnętrznej pętli **for** wykonywana jest wewnętrzna pętla **for**.
- Liczba iteracji wewnętrznej pętli **for** wynosi i dla $i = n - 1, \dots, 1$.
- W każdej iteracji wewnętrznej pętli **for** wykonana jest stała liczba operacji.
- Złożoność algorytmu: $\Theta(\sum_{i=1}^{n-1} i) = \Theta(n^2)$ w przypadku optymistycznym i pesymistycznym.

Sortowanie przez scalanie (merge sort)

- Podzielić tablicę na dwie podtablice.
- Posortuj rekurencyjnie każdą z tych podtablic.
- Scal posortowane podtablice w jedną posortowaną tablicę.
- Metoda dziel i zwyciężaj.
- Elementy nie są sortowane w miejscu.

Sortowanie przez scalanie (merge sort)

- Podzielić tablicę na dwie podtablice.
- Posortuj rekurencyjnie każdą z tych podtablic.
- Scal posortowane podtablice w jedną posortowaną tablicę.
- Metoda dziel i zwyciężaj.
- Elementy nie są sortowane w miejscu.

Sortowanie przez scalanie (merge sort)

- Podzielić tablicę na dwie podtablice.
- Posortuj rekurencyjnie każdą z tych podtablic.
- Scal posortowane podtablice w jedną posortowaną tablicę.
- Metoda dziel i zwyciężaj.
- Elementy nie są sortowane w miejscu.

Sortowanie przez scalanie (merge sort)

- Podzielić tablicę na dwie podtablice.
- Posortuj rekurencyjnie każdą z tych podtablic.
- Scal posortowane podtablice w jedną posortowaną tablicę.
- Metoda dziel i zwyciężaj.
- Elementy nie są sortowane w miejscu.

Sortowanie przez scalanie (merge sort)

- Podzielić tablicę na dwie podtablice.
- Posortuj rekurencyjnie każdą z tych podtablic.
- Scal posortowane podtablice w jedną posortowaną tablicę.
- Metoda dziel i zwyciężaj.
- Elementy nie są sortowane w miejscu.

Scalanie posortowanych tablic - idea

- Scalamy posortowane niemalejąco tablice $B[1..n]$ o $C[1..m]$
- Aby znaleźć najmniejszy element (w obu tablicach łącznie), wystarczy porównać $B[1]$ z $C[1]$. Wybrany element przepisujemy do tablicy wynikowej.
- W każdym kroku algorytmu wybieramy mniejszy z dwóch elementów: pierwszego jeszcze niewybranego z tablicy B i pierwszego niewybranego z tablicy C .
- Co zrobić, kiedy przepisujemy wszystkie elementy z którejś z tablic?
przepisujemy wszystkie elementy z drugiej tablicy.
- Jeśli chcemy scalić części tablicy A , to najpierw przepisujemy je do tablicy B i C .

Scalanie posortowanych tablic - idea

- Scalamy posortowane niemalejąco tablice $B[1..n]$ o $C[1..m]$
- Aby znaleźć najmniejszy element (w obu tablicach łącznie), wystarczy porównać $B[1]$ z $C[1]$. Wybrany element przepisujemy do tablicy wynikowej.
- W każdym kroku algorytmu wybieramy mniejszy z dwóch elementów: pierwszego jeszcze niewybranego z tablicy B i pierwszego niewybranego z tablicy C .
- Co zrobić, kiedy przepisujemy wszystkie elementy z którejś z tablic?
przepisujemy wszystkie elementy z drugiej tablicy.
- Jeśli chcemy scalić części tablicy A , to najpierw przepisujemy je do tablicy B i C .

Scalanie posortowanych tablic - idea

- Scalamy posortowane niemalejąco tablice $B[1..n]$ o $C[1..m]$
- Aby znaleźć najmniejszy element (w obu tablicach łącznie), wystarczy porównać $B[1]$ z $C[1]$. Wybrany element przepisujemy do tablicy wynikowej.
- W każdym kroku algorytmu wybieramy mniejszy z dwóch elementów: pierwszego jeszcze niewybranego z tablicy B i pierwszego niewybranego z tablicy C .
- Co zrobić, kiedy przepisujemy wszystkie elementy z którejś z tablic?
przepisujemy wszystkie elementy z drugiej tablicy.
- Jeśli chcemy scalić części tablicy A , to najpierw przepisujemy je do tablicy B i C .

Scalanie posortowanych tablic - idea

- Scalamy posortowane niemalejąco tablice $B[1..n]$ o $C[1..m]$
- Aby znaleźć najmniejszy element (w obu tablicach łącznie), wystarczy porównać $B[1]$ z $C[1]$. Wybrany element przepisujemy do tablicy wynikowej.
- W każdym kroku algorytmu wybieramy mniejszy z dwóch elementów: pierwszego jeszcze niewybranego z tablicy B i pierwszego niewybranego z tablicy C .
- Co zrobić, kiedy przepisujemy wszystkie elementy z którejś z tablic?
przepisujemy wszystkie elementy z drugiej tablicy.
- Jeśli chcemy scalić części tablicy A , to najpierw przepisujemy je do tablicy B i C .

Scalanie posortowanych tablic - idea

- Scalamy posortowane niemalejąco tablice $B[1..n]$ o $C[1..m]$
- Aby znaleźć najmniejszy element (w obu tablicach łącznie), wystarczy porównać $B[1]$ z $C[1]$. Wybrany element przepisujemy do tablicy wynikowej.
- W każdym kroku algorytmu wybieramy mniejszy z dwóch elementów: pierwszego jeszcze niewybranego z tablicy B i pierwszego niewybranego z tablicy C .
- Co zrobić, kiedy przepisujemy wszystkie elementy z którejś z tablic?
przepisujemy wszystkie elementy z drugiej tablicy.
- Jeśli chcemy scalić części tablicy A , to najpierw przepisujemy je do tablicy B i C .

Scalanie

```
procedure SCAL(A, p, q, r)
  int array A[1..n], array B[1..r]
  int p, q, r, i, j, k
  i = p
  j = q + 1
  k = p
  while (i <= q) and (j <= r)
    if A[i] <= A[j]
      B[k] = A[i]
      i = i + 1
    else
      B[k] = A[j]
      j = j + 1
    k = k + 1
```

Scalanie cd.

```
while i <= q
  B[k] = A[i]
  i = i + 1
  k = k + 1
while j <= r
  B[k] = A[j]
  j = j + 1
  k = k + 1
for i = p to r
  A[i] = B[i]
```

Sortowanie przez scalanie

```
procedure SORT-SCAL(A, p, r)
  int array A[1..n]
  int p, q, r
  if p < r
    q = (p + r) DIV 2
    SORT-SCAL(A, p, q)
    SORT-SCAL(A, q + 1, r)
    SCAL(A, p, q, r)
```

Sortowanie przez scalanie - złożoność

- Podział zadania na podproblemy (znalezienie środka tablicy): czas $\Theta(1)$.
- Rozwiązanie rekurencyjne dwóch podproblemów rozmiaru $\frac{n}{2}$: czas $2 \cdot T(\frac{n}{2})$.
- Połączenie rozwiązań podproblemów (scalanie): czas $\Theta(n)$.
- Otrzymujemy rekurencję $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$.
- Z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej $T(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$.

Sortowanie przez scalanie - złożoność

- Podział zadania na podproblemy (znalezienie środka tablicy): czas $\Theta(1)$.
- Rozwiązanie rekurencyjne dwóch podproblemów rozmiaru $\frac{n}{2}$: czas $2 \cdot T(\frac{n}{2})$.
- Połączenie rozwiązań podproblemów (scalanie): czas $\Theta(n)$.
- Otrzymujemy rekurencję $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$.
- Z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej $T(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$.

Sortowanie przez scalanie - złożoność

- Podział zadania na podproblemy (znalezienie środka tablicy): czas $\Theta(1)$.
- Rozwiązanie rekurencyjne dwóch podproblemów rozmiaru $\frac{n}{2}$: czas $2 \cdot T(\frac{n}{2})$.
- Połączenie rozwiązań podproblemów (scalanie): czas $\Theta(n)$.
- Otrzymujemy rekurencję $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$.
- Z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej $T(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$.

Sortowanie przez scalanie - złożoność

- Podział zadania na podproblemy (znalezienie środka tablicy): czas $\Theta(1)$.
- Rozwiązanie rekurencyjne dwóch podproblemów rozmiaru $\frac{n}{2}$: czas $2 \cdot T(\frac{n}{2})$.
- Połączenie rozwiązań podproblemów (scalanie): czas $\Theta(n)$.
- Otrzymujemy rekurencję $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$.
- Z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej $T(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$.

Sortowanie przez scalanie - złożoność

- Podział zadania na podproblemy (znalezienie środka tablicy): czas $\Theta(1)$.
- Rozwiązanie rekurencyjne dwóch podproblemów rozmiaru $\frac{n}{2}$: czas $2 \cdot T(\frac{n}{2})$.
- Połączenie rozwiązań podproblemów (scalanie): czas $\Theta(n)$.
- Otrzymujemy rekurencję $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$.
- Z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej $T(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$.

Sortowanie szybkie (quicksort)

- Podziel tablicę $A[p..r]$ na dwie podtablice $A[p..q - 1]$ i $A[q + 1..r]$, takie że elementy tablicy $A[p..q - 1]$ są nie większe niż **element rozdzielający** $A[q]$, a elementy tablicy $A[q + 1..r]$ są nie mniejsze niż $A[q]$.
- Posortuj rekurencyjnie każdą z tych podtablic.
- Metoda dziel i zwyciężaj.
- Sortowanie w miejscu.

Sortowanie szybkie (quicksort)

- Podziel tablicę $A[p..r]$ na dwie podtablice $A[p..q - 1]$ i $A[q + 1..r]$, takie że elementy tablicy $A[p..q - 1]$ są nie większe niż **element rozdzielający** $A[q]$, a elementy tablicy $A[q + 1..r]$ są nie mniejsze niż $A[q]$.
- Posortuj rekurencyjnie każdą z tych podtablic.
- Metoda dziel i zwyciężaj.
- Sortowanie w miejscu.

Sortowanie szybkie (quicksort)

- Podziel tablicę $A[p..r]$ na dwie podtablice $A[p..q - 1]$ i $A[q + 1..r]$, takie że elementy tablicy $A[p..q - 1]$ są nie większe niż **element rozdzielający** $A[q]$, a elementy tablicy $A[q + 1..r]$ są nie mniejsze niż $A[q]$.
- Posortuj rekurencyjnie każdą z tych podtablic.
- Metoda dziel i zwyciężaj.
- Sortowanie w miejscu.

Sortowanie szybkie (quicksort)

- Podziel tablicę $A[p..r]$ na dwie podtablice $A[p..q - 1]$ i $A[q + 1..r]$, takie że elementy tablicy $A[p..q - 1]$ są nie większe niż **element rozdzielający** $A[q]$, a elementy tablicy $A[q + 1..r]$ są nie mniejsze niż $A[q]$.
- Posortuj rekurencyjnie każdą z tych podtablic.
- Metoda dziel i zwyciężaj.
- Sortowanie w miejscu.

Sortowanie szybkie - pseudokod

```
procedure QUICK-SORT(A, p, r)
  int array A[1..n]
  int p, r
  if p < r
    q = PODZIAŁ(A,p,r)
    QUICK-SORT(A, p, q - 1)
    QUICK-SORT(A, q + 1, r)
```

Sortowanie szybkie - podział

```
procedure PODZIAL(A, p, r)
  int array A[1..n]
  int p, r, x, i
  x = A[r]
  i = p - 1
  for j = p to r - 1
    if A[j] ≤ x
      i = i + 1
      A[i] <-> A[j]
  A[i + 1] <-> A[r]
  return i + 1
```

Sortowanie szybkie - złożoność pesymistyczna

- W przypadku pesymistycznym podziały tablicy są skrajnie nierównoważone. Jedna z podtablic ma długość 0, a druga $n - 1$.
- Funkcja PODZIAŁ działa w czasie $\Theta(n)$.
- Zatem $W(n) = W(n - 1) + \Theta(n)$.
- Stosując metodę podstawiania, otrzymujemy $W(n) = \Theta(n^2)$.
- Przypadek pesymistyczny zachodzi nie tylko wtedy, gdy tablica wejściowa jest posortowana nierosnąco, ale także gdy jest posortowana niemalejąco.

Sortowanie szybkie - złożoność pesymistyczna

- W przypadku pesymistycznym podziały tablicy są skrajnie nie zrównoważone. Jedna z podtablic ma długość 0, a druga $n - 1$.
- Funkcja PODZIAŁ działa w czasie $\Theta(n)$.
- Zatem $W(n) = W(n - 1) + \Theta(n)$.
- Stosując metodę podstawiania, otrzymujemy $W(n) = \Theta(n^2)$.
- Przypadek pesymistyczny zachodzi nie tylko wtedy, gdy tablica wejściowa jest posortowana nierosnąco, ale także gdy jest posortowana niemalejąco.

Sortowanie szybkie - złożoność pesymistyczna

- W przypadku pesymistycznym podziały tablicy są skrajnie nie zrównoważone. Jedna z podtablic ma długość 0, a druga $n - 1$.
- Funkcja PODZIAŁ działa w czasie $\Theta(n)$.
- Zatem $W(n) = W(n - 1) + \Theta(n)$.
- Stosując metodę podstawiania, otrzymujemy $W(n) = \Theta(n^2)$.
- Przypadek pesymistyczny zachodzi nie tylko wtedy, gdy tablica wejściowa jest posortowana nierosnąco, ale także gdy jest posortowana niemalejąco.

Sortowanie szybkie - złożoność pesymistyczna

- W przypadku pesymistycznym podziały tablicy są skrajnie nie zrównoważone. Jedna z podtablic ma długość 0, a druga $n - 1$.
- Funkcja PODZIAŁ działa w czasie $\Theta(n)$.
- Zatem $W(n) = W(n - 1) + \Theta(n)$.
- Stosując metodę podstawiania, otrzymujemy $W(n) = \Theta(n^2)$.
- Przypadek pesymistyczny zachodzi nie tylko wtedy, gdy tablica wejściowa jest posortowana nierosnąco, ale także gdy jest posortowana niemalejąco.

Sortowanie szybkie - złożoność pesymistyczna

- W przypadku pesymistycznym podziały tablicy są skrajnie nie zrównoważone. Jedna z podtablic ma długość 0, a druga $n - 1$.
- Funkcja PODZIAŁ działa w czasie $\Theta(n)$.
- Zatem $W(n) = W(n - 1) + \Theta(n)$.
- Stosując metodę podstawiania, otrzymujemy $W(n) = \Theta(n^2)$.
- Przypadek pesymistyczny zachodzi nie tylko wtedy, gdy tablica wejściowa jest posortowana nierosnąco, ale także gdy jest posortowana niemalejąco.

Sortowanie szybkie - złożoność optymistyczna

- W przypadku optymistycznym podziały tablicy są idealnie zrównoważone. Długość każdej podtablicy nie przekracza $\frac{n}{2}$.
- Funkcja PODZIAŁ działa w czasie $\Theta(n)$.
- Zatem $B(n) = 2 \cdot B(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$.
- Z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej otrzymujemy $B(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$.
- Można wykazać, że złożoność w przypadku średnim również wynosi $\Theta(n \cdot \lg n)$.

Sortowanie szybkie - złożoność optymistyczna

- W przypadku optymistycznym podziały tablicy są idealnie zrównoważone. Długość każdej podtablicy nie przekracza $\frac{n}{2}$.
- Funkcja PODZIAŁ działa w czasie $\Theta(n)$.
- Zatem $B(n) = 2 \cdot B(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$.
- Z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej otrzymujemy $B(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$.
- Można wykazać, że złożoność w przypadku średnim również wynosi $\Theta(n \cdot \lg n)$.

Sortowanie szybkie - złożoność optymistyczna

- W przypadku optymistycznym podziały tablicy są idealnie zrównoważone. Długość każdej podtablicy nie przekracza $\frac{n}{2}$.
- Funkcja PODZIAŁ działa w czasie $\Theta(n)$.
- Zatem $B(n) = 2 \cdot B(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$.
- Z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej otrzymujemy $B(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$.
- Można wykazać, że złożoność w przypadku średnim również wynosi $\Theta(n \cdot \lg n)$.

Sortowanie szybkie - złożoność optymistyczna

- W przypadku optymistycznym podziały tablicy są idealnie zrównoważone. Długość każdej podtablicy nie przekracza $\frac{n}{2}$.
- Funkcja PODZIAŁ działa w czasie $\Theta(n)$.
- Zatem $B(n) = 2 \cdot B(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$.
- Z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej otrzymujemy $B(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$.
- Można wykazać, że złożoność w przypadku średnim również wynosi $\Theta(n \cdot \lg n)$.

Sortowanie szybkie - złożoność optymistyczna

- W przypadku optymistycznym podziały tablicy są idealnie zrównoważone. Długość każdej podtablicy nie przekracza $\frac{n}{2}$.
- Funkcja PODZIAŁ działa w czasie $\Theta(n)$.
- Zatem $B(n) = 2 \cdot B(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$.
- Z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej otrzymujemy $B(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$.
- Można wykazać, że złożoność w przypadku średnim również wynosi $\Theta(n \cdot \lg n)$.

Sortowanie szybkie - randomizowana wersja

Zastępujemy funkcję PODZIAŁ następującą funkcją: procedure

```
LOSOWY-PODZIAŁ(A, p, r)
```

```
    int array A[1..n]
```

```
    int p, r, x, i
```

```
    i = RANDOM(p, r)
```

```
    A[r] <-> A[i]
```

```
    return PODZIAŁ(A, p, r)
```

Oczekiwany czas działania algorytmu dla dowolnej tablicy zawierającej różne elementy wynosi $\Theta(n \cdot \lg n)$.

Sortowanie przez zliczanie (counting sort)

- Założenie: Sortujemy tablicę $A[1..n]$ zawierającą liczby całkowite z zakresu od 0 do k .
- W pomocniczej tablicy $C[0..k]$ dla każdego elementu tablicy A obliczymy, ile jest elementów nie większych od niego.
- Na podstawie tej informacji obliczamy pozycję, którą dany element powinien zająć w posortowanej tablicy. Uwaga: równe elementy nie mogą trafić na tę samą pozycję.
- Elementy nie są sortowane w miejscu. Wynik sortowania zapisujemy w tablicy $B[1..n]$.

Sortowanie przez zliczanie (counting sort)

- Założenie: Sortujemy tablicę $A[1..n]$ zawierającą liczby całkowite z zakresu od 0 do k .
- W pomocniczej tablicy $C[0..k]$ dla każdego elementu tablicy A obliczymy, ile jest elementów nie większych od niego.
- Na podstawie tej informacji obliczamy pozycję, którą dany element powinien zająć w posortowanej tablicy. Uwaga: równe elementy nie mogą trafić na tę samą pozycję.
- Elementy nie są sortowane w miejscu. Wynik sortowania zapisujemy w tablicy $B[1..n]$.

Sortowanie przez zliczanie (counting sort)

- Założenie: Sortujemy tablicę $A[1..n]$ zawierającą liczby całkowite z zakresu od 0 do k .
- W pomocniczej tablicy $C[0..k]$ dla każdego elementu tablicy A obliczymy, ile jest elementów nie większych od niego.
- Na podstawie tej informacji obliczamy pozycję, którą dany element powinien zająć w posortowanej tablicy. Uwaga: równe elementy nie mogą trafić na tę samą pozycję.
- Elementy nie są sortowane w miejscu. Wynik sortowania zapisujemy w tablicy $B[1..n]$.

Sortowanie przez zliczanie (counting sort)

- Założenie: Sortujemy tablicę $A[1..n]$ zawierającą liczby całkowite z zakresu od 0 do k .
- W pomocniczej tablicy $C[0..k]$ dla każdego elementu tablicy A obliczymy, ile jest elementów nie większych od niego.
- Na podstawie tej informacji obliczamy pozycję, którą dany element powinien zająć w posortowanej tablicy. Uwaga: równe elementy nie mogą trafić na tę samą pozycję.
- Elementy nie są sortowane w miejscu. Wynik sortowania zapisujemy w tablicy $B[1..n]$.

Sortowanie przez zliczanie - pseudokod

```
procedure COUNTING-SORT(A, B)
  int array A[1..n]
  int array B[1..n]
  int array C[0..k]
  for i = 0 to k
    C[i] = 0
  for j = 1 to n
    C[A[j]] = C[A[j]] + 1
  for i = 1 to k
    C[i] = C[i] + C[i - 1]
  for j = n downto 1
    B[C[A[j]]] = A[j]
    C[A[j]] = C[A[j]] - 1
```

Sortowanie przez zliczanie - złożoność i stabilność

- Czas działania sortowania przez zliczanie wynosi $\Theta(n + k)$.
- Zatem jeśli $k = O(n)$, to sortowanie przez zliczanie działa w czasie $\Theta(n)$.
- Sortowanie przez zliczanie jest **stabilne**: równe elementy zachowują taką samą kolejność, jaką miały w wejściowej tablicy.
- Stabilność sortowania może być przydatna, kiedy z sortowanymi elementami związane są dodatkowe dane.

Sortowanie przez zliczanie - złożoność i stabilność

- Czas działania sortowania przez zliczanie wynosi $\Theta(n + k)$.
- Zatem jeśli $k = O(n)$, to sortowanie przez zliczanie działa w czasie $\Theta(n)$.
- Sortowanie przez zliczanie jest **stabilne**: równe elementy zachowują taką samą kolejność, jaką miały w wejściowej tablicy.
- Stabilność sortowania może być przydatna, kiedy z sortowanymi elementami związane są dodatkowe dane.

Sortowanie przez zliczanie - złożoność i stabilność

- Czas działania sortowania przez zliczanie wynosi $\Theta(n + k)$.
- Zatem jeśli $k = O(n)$, to sortowanie przez zliczanie działa w czasie $\Theta(n)$.
- Sortowanie przez zliczanie jest **stabilne**: równe elementy zachowują taką samą kolejność, jaką miały w wejściowej tablicy.
- Stabilność sortowania może być przydatna, kiedy z sortowanymi elementami związane są dodatkowe dane.

Sortowanie przez zliczanie - złożoność i stabilność

- Czas działania sortowania przez zliczanie wynosi $\Theta(n + k)$.
- Zatem jeśli $k = O(n)$, to sortowanie przez zliczanie działa w czasie $\Theta(n)$.
- Sortowanie przez zliczanie jest **stabilne**: równe elementy zachowują taką samą kolejność, jaką miały w wejściowej tablicy.
- Stabilność sortowania może być przydatna, kiedy z sortowanymi elementami związane są dodatkowe dane.

Poprawność algorytmów

- Algorytm A jest poprawny \Leftrightarrow dla każdego poprawnych danych wejściowych algorytm A zatrzymuje się i daje poprawny wynik.
- Algorytm A jest częściowo poprawny \Leftrightarrow dla każdego poprawnych danych wejściowych, jeżeli algorytm A zatrzymuje się, to daje poprawny wynik.
- Zdanie logiczne p nazywamy niezmiennikiem pętli L , jeśli p jest prawdziwe przed rozpoczęciem wykonania L oraz p jest prawdziwe po każdej iteracji tej pętli (lub, równoważnie, przed każdą iteracją).
- Pojęcie niezmiennika pętli jest użyteczne w dowodzeniu poprawności algorytmów.

Poprawność algorytmów

- Algorytm A jest poprawny \Leftrightarrow dla każdego poprawnych danych wejściowych algorytm A zatrzymuje się i daje poprawny wynik.
- Algorytm A jest częściowo poprawny \Leftrightarrow dla każdego poprawnych danych wejściowych, jeżeli algorytm A zatrzymuje się, to daje poprawny wynik.
- Zdanie logiczne p nazywamy niezmiennikiem pętli L , jeśli p jest prawdziwe przed rozpoczęciem wykonania L oraz p jest prawdziwe po każdej iteracji tej pętli (lub, równoważnie, przed każdą iteracją).
- Pojęcie niezmiennika pętli jest użyteczne w dowodzeniu poprawności algorytmów.

Poprawność algorytmów

- Algorytm A jest poprawny \Leftrightarrow dla każdego poprawnego danych wejściowych algorytm A zatrzymuje się i daje poprawny wynik.
- Algorytm A jest częściowo poprawny \Leftrightarrow dla każdego poprawnego danych wejściowych, jeżeli algorytm A zatrzymuje się, to daje poprawny wynik.
- Zdanie logiczne p nazywamy niezmiennikiem pętli L , jeśli p jest prawdziwe przed rozpoczęciem wykonania L oraz p jest prawdziwe po każdej iteracji tej pętli (lub, równoważnie, przed każdą iteracją).
- Pojęcie niezmiennika pętli jest użyteczne w dowodzeniu poprawności algorytmów.

Poprawność algorytmów

- Algorytm A jest poprawny \Leftrightarrow dla każdego poprawnych danych wejściowych algorytm A zatrzymuje się i daje poprawny wynik.
- Algorytm A jest częściowo poprawny \Leftrightarrow dla każdego poprawnych danych wejściowych, jeżeli algorytm A zatrzymuje się, to daje poprawny wynik.
- Zdanie logiczne p nazywamy niezmiennikiem pętli L , jeśli p jest prawdziwe przed rozpoczęciem wykonania L oraz p jest prawdziwe po każdej iteracji tej pętli (lub, równoważnie, przed każdą iteracją).
- Pojęcie niezmiennika pętli jest użyteczne w dowodzeniu poprawności algorytmów.

Przykład 1: poprawność sortowania przez wstawianie.

```
procedure SORT-W(A, n)
  int array A[1..n]
  int n, r
  for j = 2 to n
    r = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > r
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = r
```

Poprawność algorytmów

- **Niezmiennik pętli for:** na początku każdej iteracji tej pętli fragment tablicy $A[1..j-1]$ składa się z elementów znajdujących się pierwotnie w $A[1..j-1]$, ale posortowanych niemalejąco.
- **Inicjalizacja:** na początku pierwszej iteracji pętli **for** mamy $j = 2$. Fragment tablicy $A[1..j - 1]$ składa się z jednego elementu $A[1]$, który od początku znajdował się na tej pozycji, i oczywiście jest posortowany.

Poprawność algorytmów

- **Niezmiennik pętli for:** na początku każdej iteracji tej pętli fragment tablicy $A[1..j-1]$ składa się z elementów znajdujących się pierwotnie w $A[1..j-1]$, ale posortowanych niemalejąco.
- **Inicjalizacja:** na początku pierwszej iteracji pętli **for** mamy $j = 2$. Fragment tablicy $A[1..j - 1]$ składa się z jednego elementu $A[1]$, który od początku znajdował się na tej pozycji, i oczywiście jest posortowany.

Poprawność algorytmów

- **Utrzymanie:** nieformalnie, pojedyncza iteracja pętli **for** polega na przesuwaniu elementów $A[j - 1]$, $A[j - 2]$, $A[j - 3]$ itd. o jedną pozycję w prawo aż do znalezienia właściwego miejsca na $A[j]$. Zatem jeśli niezmiennik pętli był prawdziwy przed wykonaniem tej iteracji, to po jej wykonaniu fragment tablicy $A[1..j]$ zawiera posortowane elementy znajdujące się pierwotnie w tej podtablicy.
- Uwaga! Formalny dowód utrzymania niezmiennika pętli wymagałby sformułowania i udowodnienia niezmiennika pętli **while**.

Poprawność algorytmów

- **Utrzymanie:** nieformalnie, pojedyncza iteracja pętli **for** polega na przesuwaniu elementów $A[j - 1]$, $A[j - 2]$, $A[j - 3]$ itd. o jedną pozycję w prawo aż do znalezienia właściwego miejsca na $A[j]$. Zatem jeśli niezmiennik pętli był prawdziwy przed wykonaniem tej iteracji, to po jej wykonaniu fragment tablicy $A[1..j]$ zawiera posortowane elementy znajdujące się pierwotnie w tej podtablicy.
- Uwaga! Formalny dowód utrzymania niezmiennika pętli wymagałby sformułowania i udowodnienia niezmiennika pętli **while**.

Poprawność algorytmów

- **Zakończenie:** pętli **for** kończy się, kiedy j osiąga wartość $n + 1$. Wstawiając $j = n + 1$ w sformułowaniu niezmiennika pętli, wnioskujemy, że fragment $A[1..n]$, czyli cała tablica, zawiera znajdujące się w niej początkowo elementy, posortowane niemalejąco.
- Za pomocą niezmiennika pętli pokazaliśmy, że jeśli algorytm sortowania się zakończy, to zwróci prawidłowy wynik. Ponadto pętla **for** ma dokładnie $n - 1$ iteracji, a zawarta w niej pętla **while** wykona co najwyżej j iteracji dla każdej wartości j przyjmowanej w pętli **for**. Zatem algorytm zawsze się zatrzymuje.
- **Wniosek:** algorytm sortowania przez wstawianie jest poprawny.

Poprawność algorytmów

- **Zakończenie:** pętli **for** kończy się, kiedy j osiąga wartość $n + 1$. Wstawiając $j = n + 1$ w sformułowaniu niezmiennika pętli, wnioskujemy, że fragment $A[1..n]$, czyli cała tablica, zawiera znajdujące się w niej początkowo elementy, posortowane niemalejąco.
- Za pomocą niezmiennika pętli pokazaliśmy, że jeśli algorytm sortowania się zakończy, to zwróci prawidłowy wynik. Ponadto pętla **for** ma dokładnie $n - 1$ iteracji, a zawarta w niej pętla **while** wykona co najwyżej j iteracji dla każdej wartości j przyjmowanej w pętli **for**. Zatem algorytm zawsze się zatrzymuje.
- **Wniosek:** algorytm sortowania przez wstawianie jest poprawny.

Poprawność algorytmów

- **Zakończenie:** pętli **for** kończy się, kiedy j osiąga wartość $n + 1$. Wstawiając $j = n + 1$ w sformułowaniu niezmiennika pętli, wnioskujemy, że fragment $A[1..n]$, czyli cała tablica, zawiera znajdujące się w niej początkowo elementy, posortowane niemalejąco.
- Za pomocą niezmiennika pętli pokazaliśmy, że jeśli algorytm sortowania się zakończy, to zwróci prawidłowy wynik. Ponadto pętla **for** ma dokładnie $n - 1$ iteracji, a zawarta w niej pętla **while** wykona co najwyżej j iteracji dla każdej wartości j przyjmowanej w pętli **for**. Zatem algorytm zawsze się zatrzymuje.
- **Wniosek:** algorytm sortowania przez wstawianie jest poprawny.

Przykład 2: poprawność funkcji PODZIAŁ wykorzystywanej w sortowaniu szybkim.

```
procedure PODZIAL(A, p, r)
  int array A[1..n]
  int p, r, x, i
  x = A[r]
  i = p - 1
  for j = p to r - 1
    if A[j] ≤ x
      i = i + 1
      A[i] <-> A[j]
  A[i + 1] <-> A[r]
  return i + 1
```

Poprawność algorytmów

- **Niezmiennik pętli for:** na początku każdej iteracji tej pętli dla każdego indeksu k w tablicy $A[p..r]$ zachodzą zależności:
 - 1 Jeśli $p \leq k \leq i$, to $A[k] \leq x$.
 - 2 Jeśli $i + 1 \leq k \leq j - 1$, to $A[k] > x$.
 - 3 Jeśli $k = r$, to $A[k] = x$.
- Inicjalizacja: przed pierwszą iteracją pętli for mamy $i = p - 1$ oraz $j = p$. Nie istnieje więc takie k , że $p \leq k \leq i$ lub $i + 1 \leq k \leq j - 1$. Dla $k = r$ mamy $A[k] = x$ dzięki wykonaniu pierwszej instrukcji algorytmu.

Poprawność algorytmów

- **Niezmiennik pętli for:** na początku każdej iteracji tej pętli dla każdego indeksu k w tablicy $A[p..r]$ zachodzą zależności:
 - 1 Jeśli $p \leq k \leq i$, to $A[k] \leq x$.
 - 2 Jeśli $i + 1 \leq k \leq j - 1$, to $A[k] > x$.
 - 3 Jeśli $k = r$, to $A[k] = x$.
- **Inicjalizacja:** przed pierwszą iteracją pętli for mamy $i = p - 1$ oraz $j = p$. Nie istnieje więc takie k , że $p \leq k \leq i$ lub $i + 1 \leq k \leq j - 1$. Dla $k = r$ mamy $A[k] = x$ dzięki wykonaniu pierwszej instrukcji algorytmu.

Poprawność algorytmów

- **Niezmiennik pętli for:** na początku każdej iteracji tej pętli dla każdego indeksu k w tablicy $A[p..r]$ zachodzą zależności:
 - 1 Jeśli $p \leq k \leq i$, to $A[k] \leq x$.
 - 2 Jeśli $i + 1 \leq k \leq j - 1$, to $A[k] > x$.
 - 3 Jeśli $k = r$, to $A[k] = x$.
- **Inicjalizacja:** przed pierwszą iteracją pętli **for** mamy $i = p - 1$ oraz $j = p$. Nie istnieje więc takie k , że $p \leq k \leq i$ lub $i + 1 \leq k \leq j - 1$. Dla $k = r$ mamy $A[k] = x$ dzięki wykonaniu pierwszej instrukcji algorytmu.

Poprawność algorytmów

- **Niezmiennik pętli for:** na początku każdej iteracji tej pętli dla każdego indeksu k w tablicy $A[p..r]$ zachodzą zależności:
 - 1 Jeśli $p \leq k \leq i$, to $A[k] \leq x$.
 - 2 Jeśli $i + 1 \leq k \leq j - 1$, to $A[k] > x$.
 - 3 Jeśli $k = r$, to $A[k] = x$.
- **Inicjalizacja:** przed pierwszą iteracją pętli **for** mamy $i = p - 1$ oraz $j = p$. Nie istnieje więc takie k , że $p \leq k \leq i$ lub $i + 1 \leq k \leq j - 1$. Dla $k = r$ mamy $A[k] = x$ dzięki wykonaniu pierwszej instrukcji algorytmu.

Poprawność algorytmów

- **Niezmiennik pętli for:** na początku każdej iteracji tej pętli dla każdego indeksu k w tablicy $A[p..r]$ zachodzą zależności:
 - 1 Jeśli $p \leq k \leq i$, to $A[k] \leq x$.
 - 2 Jeśli $i + 1 \leq k \leq j - 1$, to $A[k] > x$.
 - 3 Jeśli $k = r$, to $A[k] = x$.
- **Inicjalizacja:** przed pierwszą iteracją pętli **for** mamy $i = p - 1$ oraz $j = p$. Nie istnieje więc takie k , że $p \leq k \leq i$ lub $i + 1 \leq k \leq j - 1$. Dla $k = r$ mamy $A[k] = x$ dzięki wykonaniu pierwszej instrukcji algorytmu.

Poprawność algorytmów

- **Utrzymanie:** rozważmy dwa przypadki:

- ① $A[j] > x$. Wówczas jedynym działaniem wykonanym w pętli jest zwiększenie j . Po tym zwiększeniu dla $k = j - 1$ jest spełniony warunek $A[k] > x$. Warunki dla pozostałych elementów pozostają bez zmian, więc są spełnione.
- ② $A[j] \leq x$. Wówczas zwiększana jest wartość i , elementy $A[i]$ i $A[j]$ są zamieniane, a następnie zwiększa się j . Dla $k = i$ mamy $A[k] \leq x$ ze względu na dokonaną zamianę. Podobnie dla $k = j - 1$ mamy $A[k] > x$, ponieważ wstawiony na tę pozycję element pochodził z obszaru wartości większych od x .

Poprawność algorytmów

- **Utrzymanie:** rozważmy dwa przypadki:
 - 1 $A[j] > x$. Wówczas jedynym działaniem wykonanym w pętli jest zwiększenie j . Po tym zwiększeniu dla $k = j - 1$ jest spełniony warunek $A[k] > x$. Warunki dla pozostałych elementów pozostają bez zmian, więc są spełnione.
 - 2 $A[j] \leq x$. Wówczas zwiększana jest wartość i , elementy $A[i]$ i $A[j]$ są zamieniane, a następnie zwiększa się j . Dla $k = i$ mamy $A[k] \leq x$ ze względu na dokonaną zamianę. Podobnie dla $k = j - 1$ mamy $A[k] > x$, ponieważ wstawiony na tę pozycję element pochodził z obszaru wartości większych od x .

Poprawność algorytmów

- **Utrzymanie:** rozważmy dwa przypadki:
 - 1 $A[j] > x$. Wówczas jedynym działaniem wykonanym w pętli jest zwiększenie j . Po tym zwiększeniu dla $k = j - 1$ jest spełniony warunek $A[k] > x$. Warunki dla pozostałych elementów pozostają bez zmian, więc są spełnione.
 - 2 $A[j] \leq x$. Wówczas zwiększana jest wartość i , elementy $A[i]$ i $A[j]$ są zamieniane, a następnie zwiększa się j . Dla $k = i$ mamy $A[k] \leq x$ ze względu na dokonaną zamianę. Podobnie dla $k = j - 1$ mamy $A[k] > x$, ponieważ wstawiony na tę pozycję element pochodził z obszaru wartości większych od x .

Poprawność algorytmów

- **Zakończenie:** pętla **for** kończy się, kiedy j osiąga wartość r . Tablica została więc podzielona na trzy obszary: dla $p \leq k \leq i$ mamy $A[k] \leq x$, dla $i + 1 \leq k \leq r - 1$ mamy $A[k] > x$, oraz $A[r] = x$.
- Ostatnie dwie instrukcje powodują przestawienie elementu x na miejsce pomiędzy częściami tablicy zawierającymi elementy nie większe od x i elementy większe od x , a następnie zwrócenie pozycji elementu x . Otrzymujemy zatem poprawny podział tablicy.
- Pętla **for** wykonuje dokładnie $r - p$ iteracji. Zatem algorytm zawsze się zatrzymuje.
- **Wniosek:** algorytm **PODZIAŁ** jest poprawny.

Poprawność algorytmów

- **Zakończenie:** pętla **for** kończy się, kiedy j osiąga wartość r . Tablica została więc podzielona na trzy obszary: dla $p \leq k \leq i$ mamy $A[k] \leq x$, dla $i + 1 \leq k \leq r - 1$ mamy $A[k] > x$, oraz $A[r] = x$.
- Ostatnie dwie instrukcje powodują przestawienie elementu x na miejsce pomiędzy częściami tablicy zawierającymi elementy nie większe od x i elementy większe od x , a następnie zwrócenie pozycji elementu x . Otrzymujemy zatem poprawny podział tablicy.
- Pętla **for** wykonuje dokładnie $r - p$ iteracji. Zatem algorytm zawsze się zatrzymuje.
- **Wniosek:** algorytm **PODZIAŁ** jest poprawny.

Poprawność algorytmów

- **Zakończenie:** pętla **for** kończy się, kiedy j osiąga wartość r . Tablica została więc podzielona na trzy obszary: dla $p \leq k \leq i$ mamy $A[k] \leq x$, dla $i + 1 \leq k \leq r - 1$ mamy $A[k] > x$, oraz $A[r] = x$.
- Ostatnie dwie instrukcje powodują przestawienie elementu x na miejsce pomiędzy częściami tablicy zawierającymi elementy nie większe od x i elementy większe od x , a następnie zwrócenie pozycji elementu x . Otrzymujemy zatem poprawny podział tablicy.
- Pętla **for** wykonuje dokładnie $r - p$ iteracji. Zatem algorytm zawsze się zatrzymuje.
- **Wniosek:** algorytm **PODZIAŁ** jest poprawny.

Poprawność algorytmów

- **Zakończenie:** pętla **for** kończy się, kiedy j osiąga wartość r . Tablica została więc podzielona na trzy obszary: dla $p \leq k \leq i$ mamy $A[k] \leq x$, dla $i + 1 \leq k \leq r - 1$ mamy $A[k] > x$, oraz $A[r] = x$.
- Ostatnie dwie instrukcje powodują przestawienie elementu x na miejsce pomiędzy częściami tablicy zawierającymi elementy nie większe od x i elementy większe od x , a następnie zwrócenie pozycji elementu x . Otrzymujemy zatem poprawny podział tablicy.
- Pętla **for** wykonuje dokładnie $r - p$ iteracji. Zatem algorytm zawsze się zatrzymuje.
- **Wniosek:** algorytm PODZIAŁ jest poprawny.